МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ
MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE



УДК 621.9:531.3 DOI 10.12737/18207

Синергетический подход при изучении устойчивости формообразующих траекторий попутного фрезерования боковыми гранями концевых фрез (случай малой скорости резания)*

В. Л. Заковоротный[1], А. А Губанова[2], А. Д. Лукьянов[3]**
[1, 2, 3]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Synergetic approach to studying stability of form-building trajectories of climb milling by side edges of endmills (low cutting speed case)***

V. L. Zakovorotny[1], A. A. Gubanova[2], A. D. Lukyanov[3]**
[1, 2, 3] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Целью работы является рассмотрение проблемы устойчивости стационарных траекторий упругих деформационных смещений инструмента при продольном фрезеровании концевыми фрезами. В подвижной системе координат, перемещение которой определяется движением исполнительных элементов, стационарным установившимся состоянием является не точка равновесия (как при точении), а некоторая замкнутая траектория. Использована синергетическая концепция анализа траекторий, выполняемого в два этапа. На первом этапе по предложенной методике вычисляются установившиеся стационарные траектории. На втором этапе анализируется их устойчивость. В предлагаемой статье исследуется случай, когда в пределах импульсной реакции системы параметры уравнений в вариациях относительно стационарной траектории можно считать постоянными. Рассмотрены особенности формирования стационарных траекторий, получены условия, при которых они сходятся к некоторым установившимся траекториям. Кроме того, получены некоторые общие свойства потери равновесия. Приводится пример анализа и даются рекомендации по обеспечению устойчивости траектории установившихся формообразующих движений.

Stability problems of the stationary trajectories of the tool elastic deformational displacement under the longitudinal endmilling are considered. In the moving coordinates which displacement is determined by the actuators motion, the stationary steady state is not an equilibrium point (as when turning), but some closed trajectory. The synergetic concept of the analysis of trajectories executed in two stages is used. At the first stage, the established stationary trajectories are calculated according to the offered technique. At the second stage, the stability of these trajectories is analyzed. A case, when the equation parameters in variations under the fixed trajectory can be considered constant within the system impulsive reaction, is considered. Features of the stationary trajectories formation are studied; conditions under which they converge to some steady trajectories are obtained. Besides, some general properties of the loss of balance are received. An example of analysis is cited, and recommendations for ensuring stability of a trajectory of the established form-building motions are given.

Ключевые слова: динамика процесса фрезерования концевыми фрезами, стационарные траектории, устойчивость, синергетика, переменные параметры.

Keywords: endmilling dynamics, stationary trajectories, stability, synergetics, variable parameters.

Введение. Одной из центральных проблем науки во второй половине XX века стало формирование синергетической парадигмы эволюции и самоорганизации [1–4]. В известных работах [5, 6] предложено использовать ее для управления сложными нелинейными объектами, в том числе для анализа и синтеза динамической системы резания [7–9]. Система резания рассматривается как взаимодействие подсистем инструмента и обрабатываемой детали через связь, формируемую процессом обработки [10–16]. Данная связь является нелинейной с периодически изменяющимися параметрами и обладает свойством эволюционной изменчивости [7–9]. В литературе описаны проблемы устойчивости и

*Работа выполнена по гранту РФФИ №14-08-00206а.
**E-mail: vzakovorotny@dstu.edu.ru, anatoliya81@mail.ru, lex1998@rambler.ru
***The research is done on RFFI grant no. 14-08-00206a.

многообразий, формируемых в окрестностях равновесия. Рассматриваются автоколебания [17, 18], инвариантные торы [19–21] и хаотические аттракторы [19–23]. Показано, что упругие деформационные смещения не могут быть скалярными, если необходимо раскрыть их основные динамические свойства. Они, как минимум, должны анализироваться в плоскости [24–27]. На динамические свойства системы оказывает влияние и тип процесса резания [7, 8, 26–48].

Из рассматриваемых в данном контексте процессов наиболее сложным является фрезерование [26–47]. Это обусловлено его нестационарностью, периодическими изменениями параметров длины и толщины слоя, срезаемого каждым режущим лезвием фрезы. Поэтому в подвижной системе координат, перемещение которой определяется траекториями исполнительных элементов, стационарным установившимся состоянием является не точка равновесия (как при точении), а некоторая замкнутая траектория. В связи с этим уравнение динамики в общем случае имеет периодически изменяющиеся коэффициенты. Кроме того, учитывается влияние запаздывающих аргументов [28–39]. В указанных работах для изучения устойчивости используется теория Флоке для T — периодических процессов. Изучается процесс фрезерования на станках, имеющих до пяти координат управления при обработке деталей, матрицы жесткости которых существенно изменяются вдоль траектории движения инструмента [40–47]. В настоящей статье результаты отмеченных выше работ рассматриваются в отношении полных нелинейных математических моделей с учетом периодического изменения параметров. При этом ставится задача исследования устойчивости не точки в подвижной системе координат, а стационарной траектории формообразующих движений. Здесь можно рассматривать два случая. Первый относится к обработке с малыми частотами вращения шпинделя, когда в системе в пределах импульсной реакции параметры можно считать замороженными. Это явление рассматривается в рамках данной работы. Второй случай относится к обработке с большими частотами вращения инструмента, когда параметры нельзя считать замороженными. Соответствующий материал будет рассмотрен в следующей статье.

Представленный в рамках данного исследования случай исследуется с учетом синергетического принципа декомпозиции систем уравнений. При этом рассматриваются два иерархических уровня. Первый — определение стационарной траектории формообразующих движений, которая характеризуется тем, что $X(t) = X(t - kT), k = 1,2,3...$ (здесь T — время периодического повторения вариации площади срезаемого слоя, $X(t)$ — вектор пространственных упругих деформационных смещений). Второй — анализ уравнения в вариациях относительно этих траекторий и определение их устойчивости. Возможность построения иерархии уравнений динамики опирается на синергетические принципы [5–7], а также на асимптотические свойства нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих малые параметры при производных [49, 50].

Базовая математическая модель. Исследуем попутное фрезерование боковыми лезвиями прямозубой концевой фрезой недеформируемой заготовки (рис. 1).

Деформации инструмента рассмотрим в плоскости, нормальной к оси инструмента. Будем считать, что ширина b обрабатываемой заготовки такова, что изгибом фрезы при ее деформировании можно пренебречь. Тогда $b = const$. Толщина срезаемого слоя определяется $a(\varphi) = a_к(\varphi) - X_1(\varphi)$. Здесь $a_к(\varphi)$ — составляющая толщины, зависящая от угла φ поворота фрезы. Она не учитывает упругие деформационные смещения в направлении, нормальном к поверхности резания X_1, и является периодической функцией угла φ. Введем понятие стационарной траектории деформационных смещений $X^*(\varphi) = \{X_1^*(\varphi), X_2^*(\varphi)\}^T$. Она характеризует установившиеся упругие деформационные смещения инструмента и является периодической функцией φ с тем же периодом. Если в системе сформировалась стационарная траектория, то для нее справедливо: $a(\varphi) = a(\varphi - i\Delta\varphi)$, $a_k(\varphi) = a_k(\varphi - i\Delta\varphi)$, $X^*(\varphi) = X^*(\varphi - i\Delta\varphi), i = 0,1,2,...$ Рассматривается случай $\Omega = const$, где Ω — циклическая частота вращения фрезы. Тогда $\phi = \int_0^t \Omega dt = \Omega t$. Следовательно, справедливо: $a(t) = a(t - iT)$, $a_k(t) = a_k(t - iT)$, $X^*(t) = X^*(t - iT), i = 0,1,2...$

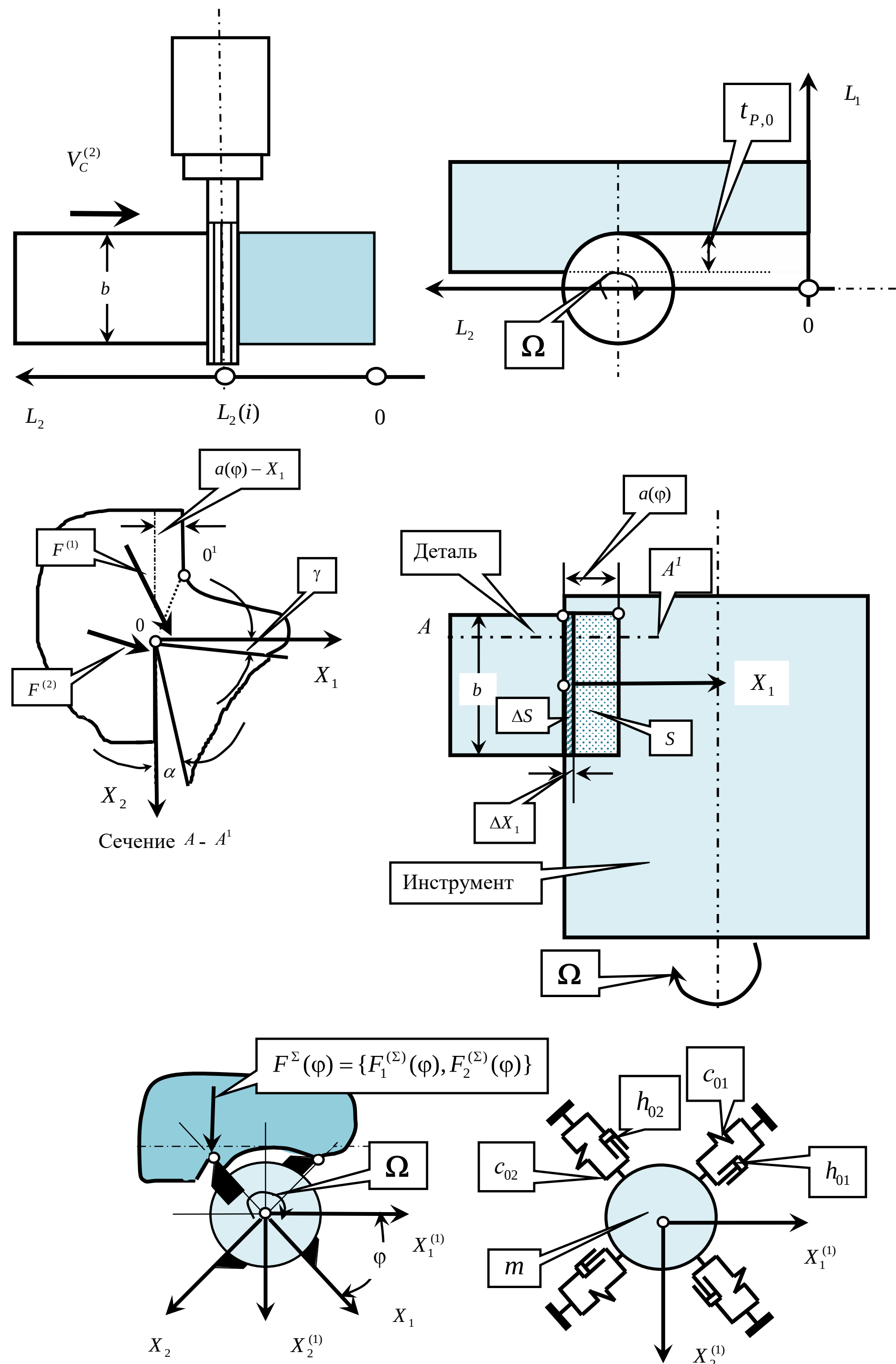


Рис. 1. Схема взаимодействия подсистем инструмента и обрабатываемой заготовки

Введем в рассмотрение две системы координат. Первая имеет начало координат в центре фрезы без учета упругих деформационных смещений. В этой системе $X^{(1)}=\{X_1^{(1)},X_2^{(1)}\}^T\subset\aleph^{(1)}$ рассматриваются деформации центра фрезы. В частности, при продольном фрезеровании система движется по направлению L_2 со скоростью $V_C^{(2)}$ (рис. 1). В общем случае траектория центра вращения фрезы без учета ее упругих деформационных смещений определяется двумя фазовыми траекториями $(V_C^{(1)}=dL_1/dt,L_1)$ и $(V_C^{(2)}=dL_2/dt,L_2)$. Фактически это программа ЧПУ станка.

Вторая система привязана к кинематической траектории движения режущего лезвия, рассматривает деформационные смещения его вершины: $X=\{X_1,X_2\}^T\subset\aleph$. Так как нет деформации режущего лезвия по отношению к телу фрезы, то деформациям вершины режущего лезвия соответствуют деформационные смещения оси фрезы. Очевидно, связь между этими системами координат определяется

$$X^{(1)} = S^{(1)} X \ , \qquad (1)$$

где $S^{(1)} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$, а также

$$X = SX^{(1)} \, , \qquad (2)$$

где $S = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$.

Так как $\Omega = const$, то операторы $S(\Omega t)$ и $S^{(1)}(\Omega t)$ есть периодические функции времени. При рассмотрении системы в пространстве $\aleph$ фрезерование имеет свойства, аналогичные точению, но обработка ведется с периодически изменяющейся толщиной срезаемого слоя. Пусть в этом пространстве заданы силы, действующие на режущее лезвие. Тогда деформационные смещения в пространстве $\aleph$ определяются из системы

$$m\frac{d^2 X}{dt^2} + h\frac{dX}{dt} + cX = F^{\Sigma}(t), \qquad (3)$$

где $m = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{bmatrix}$ — матрицы инерционных, диссипативных и упругих коэффициентов инструмента; $F^{\Sigma}(t) = \{F_1^{(\Sigma)}(t), F_2^{(\Sigma)}(t)\}^T$.

Параметры *m, h,* и с можно определить по правилам, изложенным, например, в [7, 8, 16, 51]. При полной симметрии инструмента матрицы h, c не только симметричные, но и диагональные [51]. Кроме того, они имеют равные коэффициенты и не изменяются при переходе от пространства $\aleph$ к $\aleph^{(1)}$.

Использование синергетического подхода требует выяснения законов взаимодействия системы со средой [3–7], в нашем случае — с процессом резания. Поэтому необходимо силы резания представить в координатах состояния. Они определяются суммой сил, действующих на переднюю $F^{(1)}$ и на заднюю $F^{(2)}$ грани инструмента, то есть $F^{\Sigma} = F^{(1)} + F^{(2)}$ (см. рис. 1).

Следуя [7, 8, 16, 20, 21], можно утверждать:

— силы возрастают при увеличении площади срезаемого слоя;

— имеет место запаздывание между изменениями площади и вариациями сил; — при увеличении скорости резания наблюдается уменьшение сил, которое в скоростном диапазоне (40–180) м/мин можно считать экспоненциальным.

Сила $F^{(2)}$ резко увеличивается при увеличении скорости движения инструмента в сторону заготовки. Зависимость данной силы от колебательной скорости характеризует нелинейное демпфирование колебаний инструмента.

Используется также гипотеза о неизменности ориентации сил в установившемся состоянии. Она определяется для силы $F^{(1)}$ угловыми коэффициентами χ_1 и χ_2. Для силы $F^{(2)}$ — $\chi_1^{(1)}$ и $\chi_2^{(1)}$. Этим свойствам соответствуют следующие представления сил $F^{\Sigma}(t) = \{F_1^{(\Sigma)}(t), F_2^{(\Sigma)}(t)\}^T$:

$$\begin{cases} F_1^{(\Sigma)}(X_1, X_2) = \chi_1\rho_0[1 + \mu\exp(-\alpha_1(V - \dfrac{X_2}{dt}))]\cdot b\cdot[a_k(t) - Y_1] + \chi_1^{(1)}F^{(0)}\cdot\exp[-\alpha_2 dX_1/dt]; \\ F_2^{(\Sigma)}(X_1, X_2) = \chi_2\rho_0[1 + \mu\exp(-\alpha_1(V - \dfrac{X_2}{dt}))]\cdot b\cdot[a_k(t) - Y_2] + \chi_2^{(1)}F^{(0)}\cdot\exp[-\alpha_2 dX_1/dt]; \\ T_1\dfrac{dY_1}{dt} + Y_1 = X_1; \\ T_2\dfrac{dY_2}{dt} + Y_2 = X_1. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь T_1, T_2 — постоянные времени, моделирующие запаздывание сил по отношению к смещениям, с, причем $T_2 \rangle T_1$ (таким образом, учитывается фазовый сдвиг между вариациями сил в направлениях X_1, X_2); ρ_0 — давление стружки на переднюю грань инструмента, кг/мм^2 (в области малых скоростей давление стремится к координате $\rho_0(1+\mu)$, а в области высоких скоростей — к координате ρ_0); $F_1^{(0)}$ — сила, действующая на заднюю грань инструмента в состоянии равновесия, кг; α_1, α_2 — параметры, определяющие крутизну изменения сил, с/мм; V — скорость резания, м/мин.

Модель (3), дополненная (4), является моделью динамической системы фрезерования прямозубыми концевыми фрезами. В данном случае обработка ведется без перекрытия контактов зубьями фрезы.

Анализ установившейся стационарной траектории. Рассмотрим продольное фрезерование с постоянными технологическими режимами. Под установившейся стационарной траекторией $X^*(t) = \{X_1^*, X_2^*\}^T$ понимается удовлетворяющая требованиям траектория, полученная из (3) и (4). Во-первых, на рассматриваемом временном интервале она удовлетворяет $\frac{dX_1}{dt} = \frac{dX_2}{dt} \Rightarrow 0$. Например, при фрезеровании четырехзубой фрезой диаметром 60,0 мм со скоростью 144 м/мин частота следования контактов зубьев фрезы с заготовкой равна 13,3 Гц, что на два порядка меньше собственной частоты изгибных деформаций инструмента. В этом случае при заданном времени t параметры системы можно считать постоянными, и для всех $t \in (0, t_0)$ из (3), (4) вычисляются точки равновесия. Здесь 0 — момент начала контакта зуба с деталью, t_0 — время окончания контакта. Во-вторых, $X^*(t) = X^*(t - iT)$, то есть являются завершенными переходные процессы, связанные с перераспределением сил и деформационных смещений, влияющих на силы в пределах каждого контакта зубьев. Исходя из определения траектории $X^*(t)$, для ее вычисления необходимо воспользоваться системой

$$c_\Sigma^* X^*(t) = F^\Sigma(X^*, t), \tag{5}$$

где $F_1^{(\Sigma)}(X_1^*, t) = \chi_1\rho_0[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V)]ba_k(t) + \chi_1^{(1)}F^{(0)}$; $F_2^{(\Sigma)}(X_1^*, t) = \chi_2\rho_0[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V)]ba_k(t) + \chi_2^{(1)}F^{(0)}$;

$$c_\Sigma^* = \begin{bmatrix} c + \chi_1\rho_0[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V)] \cdot b & 0 \\ \chi_1\rho_0[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V)] \cdot b & c \end{bmatrix}.$$

Решение (5) принципиально зависит от $a_k(t)$. При этом учитывается, что упругие деформационные смещения в пределах i-го контакта влияют на толщину срезаемого слоя $a(t)$ в пределах i + 1-го контакта. Таким образом, за счет перераспределения сил и деформаций в пределах каждого контакта наблюдается переходный процесс, который заканчивается, если $a(t) = a(t - iT)$. Тогда $X^*(t) = X^*(t - iT)$, что имеет место в случае, если параметры в (3), (4) можно считать замороженными [52]. Это справедливо, когда сдвиг по времени T на порядок больше времени импульсной реакции системы. В большинстве случаев это условие выполняется. Если траектория $X^*(t) = X^*(t - iT)$ определена, то на основе (1) определяется стационарная траектория деформационных смещений тела инструмента в пространстве $\aleph^{(1)}$.

Вычисления показывают, что $a(\varphi)$ с погрешностью не выше 2,0 % можно аппроксимировать треугольными характеристиками (рис. 2). Для ее вычисления необходимо знать:

— φ_0 — угол встречи инструмента с деталью;

— $\varphi^{(0)}$ — угол окончания контакта;

— $\varphi_{0,1}$ — угол, соответствующий максимальной толщине (припуск $a^{(0)}$ при $\varphi_{0,1}$ показан на рис. 2).

Эти параметры зависят от подачи на зуб $S_{p,0}$ и величины припуска на фрезерование $t_{p,0}$.

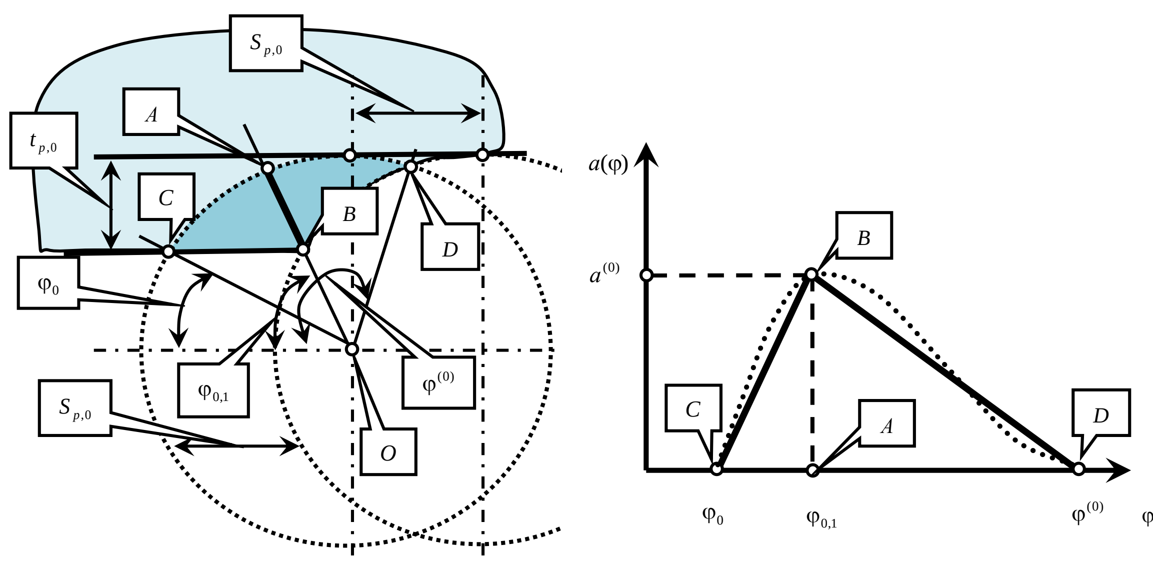
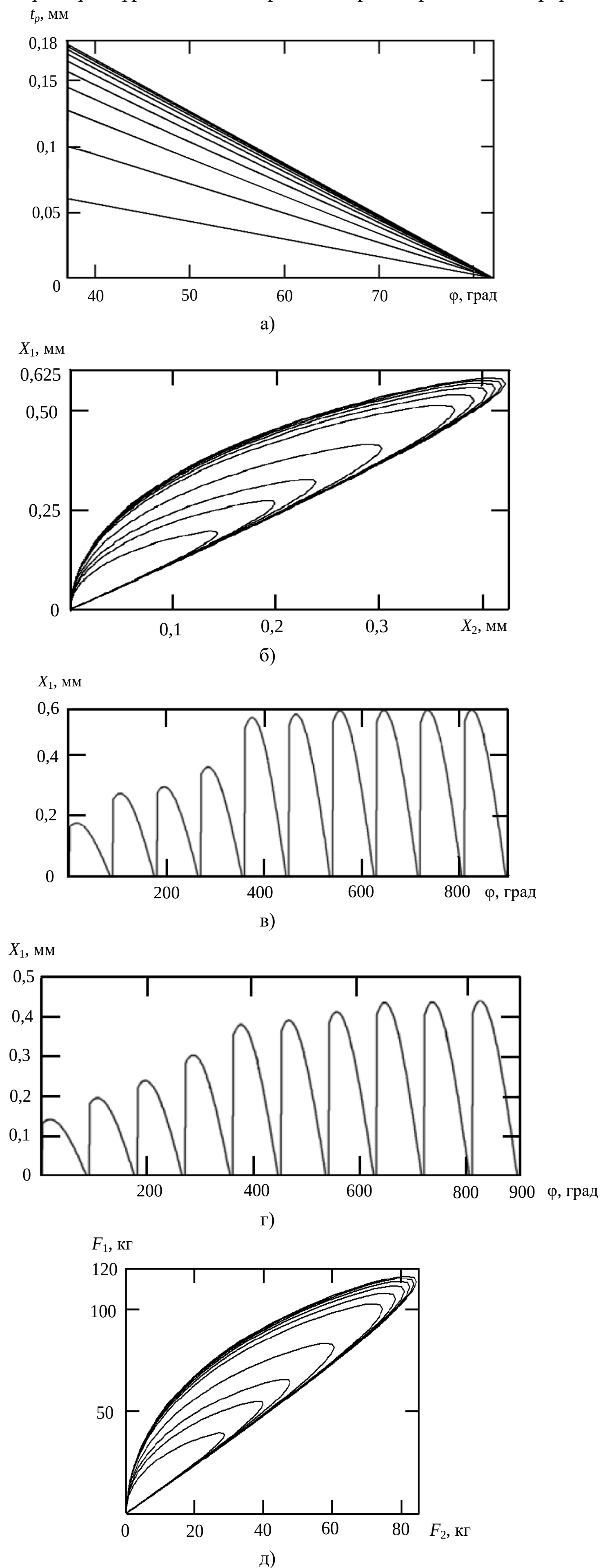
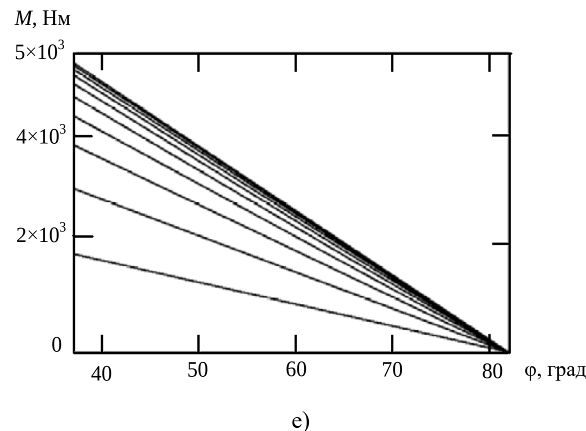


Рис. 2. Схема вычисления базовых параметров аппроксимирующей характеристики изменения толщины срезаемого слоя

Рассмотрим пример цифрового моделирования траекторий сил и деформаций (рис. 3).





е)

Рис. 3. Пример изменения величины припуска (а), деформационных смещений тела фрезы в плоскости (б), по углу поворота фрезы (в, г), сил в плоскости (д) и момента по углу при возрастании угла поворота фрезы (е)

Анализируется фрезерование четырехзубой фрезой диаметром D = 60,0 мм с припуском $t_{P,0}$ = 20 мм и подачей $S_{P,0}$ = 0,1 мм. Ширина b = 20 мм. Угловые коэффициенты: $\chi_1 = 0{,}6$, $\chi_2 = 0{,}8$. Параметры инструмента и процесса резания: с = 200 кг/мм, ρ_0 = 26 кг/мм^2. Таким образом, жесткость процесса резания равна $\rho_0 b$ = 520 кг/мм.

Анализ траекторий показывает главную особенность их выхода на режим стационарных периодических изменений: по мере установления стационарного состояния упругие деформационные смещения возрастают. Это объясняется тем, что при врезании инструмента текущие значения припуска уменьшаются за счет деформационных смещений. Однако в дальнейшем они, как правило, асимптотически стремятся к своему установившемуся стационарному состоянию, если технологические режимы постоянны и нет вариаций припуска. Время установления зависит от текущих значений жесткости инструмента и процесса резания. Показательным является анализ эволюции параметра $a^{(0)}$ на рис. 2.

Рассмотрим вопрос об установлении стационарного значения $a^{(0)}$. Пусть задано значение деформационного смещения в точке $\varphi_{0,1}$ на i-й итерации. Из (5) для фиксированной скорости $X_1(i) = a^{(0)}(i)\dfrac{\rho\chi_1}{c+\rho\chi_1}$. Здесь $\rho = \rho_0 b$.

Следовательно, $a^{(0)}(i+1) = a^{(0)}(i)(1+\dfrac{\rho\chi_1}{c+\rho\chi_1})$, или на s-й итерации

$$a^{(0)}(s) = a^{(0)}(1)[1+(\frac{\rho\chi_1}{c+\rho\chi_1})+(\frac{\rho\chi_1}{c+\rho\chi_1})^2+\cdots+(\frac{\rho\chi_1}{c+\rho\chi_1})^S] \quad (6)$$

Последовательность (6) при $S \Rightarrow \infty$ представляет ряд, который при условии $(\dfrac{\rho\chi_1}{c+\rho\chi_1})\langle 1$ сходится к выражению $(\dfrac{c+\rho\chi_1}{c})$. Таким образом,

$$a^{(0)}(s)_{при:\ S\to\infty} = a^{(0)}(1)(\frac{c+\rho\chi_1}{c}) \quad (7)$$

где $a^{(0)}(1)$ — толщина срезаемого слоя на первой итерации обработки без учета упругих деформаций.

Выражение (7) есть асимптота, к которой приближается функция толщины срезаемого слоя по мере увеличения количества итераций обработки, то есть времени. Проанализируем (6) и (7). Ряд (6) представляет геометрическую прогрессию по отношению к $q = (\dfrac{\rho\chi_1}{c+\rho\chi_1})$. Он является сходящимся при $0\langle(\dfrac{\rho\chi_1}{c+\rho\chi_1})\langle 1$. При резании это условие, как правило, выполняется, так как $c\rangle 0$, $\rho\rangle 0$. Обычно $\chi_1\rangle 0$. Коэффициент χ_1 зависит от переднего угла инструмента. При больших значениях переднего угла возможно $\chi_1\langle 0$, то есть при увеличении припуска направление деформации инструмента меняет знак. Наблюдается эффект затягивания вершины инструмента в зону резания.

Таким образом, возможны условия, при которых последовательность (6) становится расходящейся. Тогда стационарной траектории не существует. Из (6) следует: по мере увеличения жесткости c по отношению к жесткости процесса резания время установления стационарного состояния уменьшается.

Устойчивость стационарной траектории. Пусть заданы $a(t)$ и $X^*(t)=\{X_1^*, X_2^*\}^T$. Деформационным смещениям $X^*(t)=\{X_1^*, X_2^*\}^T$ из (4) соответствует траектория $Y^*(t)=\{Y_1^*, Y_2^*\}^T$. Таким образом, на предварительном этапе функции $a(t)$, $X^*(t)$ и $Y^*(t)$ являются заданными. После замены $X(t)=X^*(t)+x(t)$, $Y(t)=Y^*(t)+y(t)$ с учетом (3), (4) получаем линеаризованное уравнение в вариациях относительно стационарной траектории $X^*(t)$, $Y^*(t)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+h_\Sigma(t)\frac{dx}{dt}+c_\Sigma(t)x=0, \tag{8}$$

где $x(t)=\{x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)\}^T$; $a_0(t)=a(t)-Y_1^*(t)$; $V_0(t)=V-dX_2^*(t)/dt$;

$$c_\Sigma(t)=\begin{bmatrix} c & 0 & \chi_1\rho_0[1+\mu\exp(-\alpha_1 V_0(t))] & 0 \\ 0 & c & 0 & \chi_2\rho_0[1+\mu\exp(-\alpha_1 V_0(t))] \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ m=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$h_\Sigma(t)=\begin{bmatrix} h+\chi_1^{(1)}\alpha_2 F^{(0)}\exp(-\alpha_1 V_0 dX_1^*/dt) & -\chi_1\alpha_1\rho_0 b\mu\exp(-\alpha_1 V_0(t))a_0(t) & 0 & 0 \\ \chi_2^{(1)}\alpha_2 F^{(0)}\exp(-\alpha_1 V_0 dX_1^*/dt) & h-\chi_2\alpha_1\rho_0 b\mu\exp(-\alpha_1 V_0(t))a_0(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2 \end{bmatrix}.$$

В (8) $a_0(t)$, dX_1^*/dt и $V_0(t)$ — заданные медленно изменяющиеся функции времени. Они состоят из постоянной и периодически изменяющейся составляющих. Система устойчива в случае, если она устойчива на отрезке $t\in(0,t_0)$. Наиболее наглядно особенности потери устойчивости можно проанализировать на основе построения областей D – разбиения в плоскости двух варьируемых параметров: T_1 и $\rho=\rho_0 b$ (рис. 4).

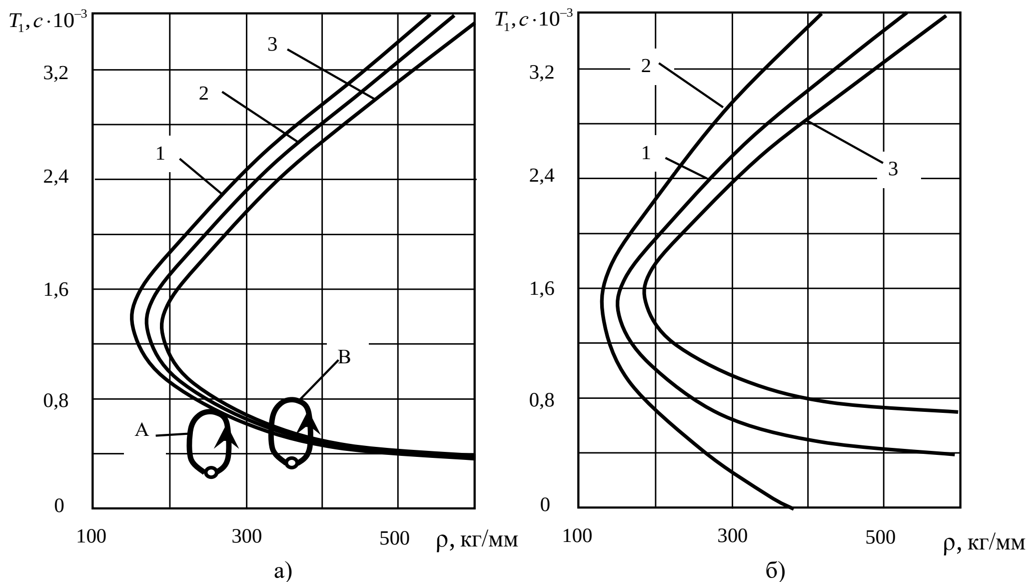


Рис. 4. Области устойчивости в плоскости T_1, ρ : при параметре $\alpha_1=0{,}5$ 1 – $T_2=T_1$, 2 – $T_2=0{,}5T_1$, 3 – $T_2=0{,}1T_1$ (а); при параметре $T_2=T_1$ $1-\alpha_1=0{,}5$, $2-\alpha_1=0{,}8$, $3-\alpha_1=0{,}2$ (б)

На иллюстрации в левой части от фигуративных линий система является асимптотически устойчивой. Проанализируем эти области. При постоянном значении ρ (например, $\rho=300$ кг/мм) существует ограниченный диапазон изменения $T_1\in(0{,}7;2{,}6)\cdot10^{-3}c$, при которых система теряет устойчивость. Параметр T_1, прежде всего, зависит от скорости резания. Поэтому потеря устойчивости наблюдается в среднескоростном диапазоне, что соответствует экспериментально наблюдаемым данным [5, 6, 13–16]. Здесь существует две тенденции. С одной стороны, увеличение T_1 вызывает возрастание фазового сдвига между смещениями и силами, что способствует потере устойчивости. С другой — при увеличении T_1 возрастает затухание в вариации сил, что способствует стабилизации равновесия. Таким образом, интенсивность возбуждения колебаний максимальна в среднескоростном диапазоне (в цитированной литературе экспериментально наблюдаемые максимальные амплитуды отмечаются при скоростях 60–80 м/с).

Анализируется обработка стали 40ХН2МА четырехзубой концевой фрезой из стали Р9К5. Диаметр фрезы d = 80,0 мм, припуск — 10,0 мм. Частота системы без динамической связи: $\omega_{0,1}^{(1)} = 1020$ Гц. Параметрами, влияющими на устойчивость, являются: ρ, α_1, T_1, T_2. Их легко идентифицировать на основе использования методов экспериментальной динамики, изложенных, например, в работах [8, 9, 33]. Параметры приведены в таблице 1.

Таблица 1

Идентифицированные параметры модели

m, кг·с^2/мм	h, кг·с/мм	с, кг/мм	α_2, с/мм	μ	F$^{(0)}$, кг
3,0·10^{-3}	5,0	3000	65	0,5	2,0

В диапазоне скоростей (0,7–3,0) м/с зависимость давления стружки от скорости определяется $\rho_0 = 30{,}0(1 + 0{,}5e^{-0{,}5V})$. Параметр $\alpha_1 \in (1{,}0;0{,}2)$. Заметим, что ρ можно варьировать в широком диапазоне, например изменяя b. Параметры α_2 и μ считаются фиксированными. Параметр T_2 рассматривается связанным с T_1, то есть $T_2 = kT_1, k \in (0{,}1)$.

Обсуждение результатов. Анализ устойчивости показал, что, когда скорость вращения инструмента на порядок меньше импульсной реакции системы, система фрезерования обладает следующими общими свойствами.

1. Подсистема инструмента представляет собой один колебательный контур при любых направлениях сил. За счет реакции со стороны резания она теряет эти свойства. Здесь уже можно выделить два колебательных контура, которые взаимно влияют друг на друга и на устойчивость траекторий.

2. Матрицы $h_\Sigma(t)$ и $c_\Sigma(t)$ являются несимметричными. Они представимы в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих. Таким образом, за счет реакции со стороны резания в системе формируются диссипативные или ускоряющие силы (определяются симметричной частью $h_\Sigma(t)$), гироскопические силы (определяются кососимметричной частью $h_\Sigma(t)$), потенциальные (определяются симметричной составляющей $c_\Sigma(t)$) и циркуляционные силы (определяются кососимметричной составляющей матрицы $c_\Sigma(t)$). Вначале рассмотрим составляющие матрицы $h_\Sigma(t)$

$$h_\Sigma(t) = h_\Sigma^{(c)}(t) + h_\Sigma^{(k)}(t), \tag{9}$$

где

$$h_\Sigma^{(c)}(t) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} h + \chi_1^{(1)}\alpha_2 F^{(0)}\exp(\alpha_2 V_{X_2}) - \\ - \chi_1\rho_0 b T_1[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1})]; \end{matrix} & \begin{matrix} 0{,}5\{\chi_2^{(1)}\alpha_2 F^{(0)}\exp(\alpha_2 V_{X_2}) - \\ - \chi_2 T_2\rho_0 b[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1}(t)] - \\ - \chi_1\alpha_1\rho_0 b\mu a_0(t)\exp[-\alpha_1 V_{X_1}(t)]\}; \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0{,}5\{\chi_2^{(1)}\alpha_2 F^{(0)}\exp(\alpha_2 V_{X_2}) - \\ - \chi_2 T_2\rho_0 b[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1}(t)] - \\ - \chi_1\alpha_1\rho_0 b\mu a_0(t)\exp[-\alpha_1 V_{X_1}(t)]\}; \end{matrix} & h - \chi_2\alpha_1\rho_0 b\mu a_0(t)\exp(-\alpha_1 V_{X_1}(t)) \end{bmatrix};$$

$$h_\Sigma^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} - 0{,}5\{\chi_2^{(1)}\alpha_2 F^{(0)}\exp(\alpha_2 V_{X_2}) - \\ - \chi_2 T_2\rho_0 b[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1}(t)] + \\ + \chi_1\alpha_1\rho_0 b\mu a_0(t)\exp[-\alpha_1 V_{X_1}(t)]\} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0{,}5\{\chi_2^{(1)}\alpha_2 F^{(0)}\exp(\alpha_2 V_{X_2}) - \\ - \chi_2 T_2\rho_0 b[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1}(t)] + \\ + \chi_1\alpha_1\rho_0 b\mu a_0(t)\exp[-\alpha_1 V_{X_1}(t)]\} \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}.$$

Из [53] известно, что необходимым условием устойчивости равновесия является положительная определенность матрицы $h_\Sigma^{(c)}(t)$. Если она становится отрицательно определенной, то гироскопические силы не могут стабилизировать равновесие. Отрицательную определенность матрицы $h_\Sigma^{(c)}(t)$ обусловливают, прежде всего, члены $\chi_1\rho_0 b T_1[1 + \mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1})]$ и $\chi_2\alpha_1\rho_0 b\mu a_0(t)\exp(-\alpha_1 V_{X_1}(t))$. Они зависят от площади $ba_0(t)$, скорости $V_{X_1}(t)$ с учетом скорости упругих деформационных смещений стационарной траектории, ориентации силы резания и жесткости процесса обработки. Если $T_1 = \alpha_1 = 0$, то $h_\Sigma^{(c)}(t)$ является положительно определенной. Таким образом, с принципиальных позиций уменьшение сил при увеличении скорости и их запаздывание вызывают один и тот же эффект. Не трудно показать, что такой же эффект вызывает наличие гистерезиса в зависимости сил от деформационных смещений.

Указанное необходимое условие устойчивости не является достаточным, но позволяет выяснить общие механизмы потери устойчивости.

3. Матрица $c_\Sigma(t)$ также представима в виде суммы

$$c_\Sigma(t) = c_\Sigma^{(c)}(t) + c_\Sigma^{(k)}(t), \tag{10}$$

где

$$c_\Sigma^{(c)}(t) = \begin{bmatrix} c + \chi_1\rho_0 b[1+\mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1})]; & 0{,}5\chi_2\rho_0 b[1+\mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1})]; \\ 0{,}5\chi_2\rho_0 b[1+\mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1})]; & c \end{bmatrix};$$

$$c_\Sigma^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5\chi_2\rho_0 b[1+\mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1})]; \\ 0{,}5\chi_2\rho_0 b[1+\mu\exp(-\alpha_1 V_{X_1})]; & 0 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что кососимметричная составляющая матрицы (10) принципиально зависит от углового коэффициента χ_2. Если $\chi_2 = 0$, то циркуляционные силы не образуются. Следовательно, геометрия инструмента должна влиять на динамические свойства. Заметим, что при условии $\chi_2 \rangle\rangle \chi_1$ не только формируются циркуляционные силы, но и $c_\Sigma^{(c)}(t)$ может стать отрицательно определенной. В этом случае система также теряет устойчивость, причем потеря устойчивости существует в форме прецессионных колебаний с возрастающей амплитудой.

4. При движении каждого зуба фрезы вдоль обрабатываемой поверхности изменяются параметры системы. Поэтому вдоль траектории движения наблюдается перестройка свойств системы. Она проходит медленно, в пределах импульсной реакции системы. Однако по мере увеличения скорости начинают сказываться параметрические явления, которые будут рассмотрены в следующей статье. При движении инструмента вдоль обрабатываемой поверхности изменяется скорость резания за счет скоростей упругих деформационных смещений. Изменяется и толщина срезаемого слоя. В пределах каждого цикла T_0 стационарных периодических движений очевидным условием является $\int_t^{t+T_0} V(t)\,dt \equiv 0$. Поэтому средняя скорость остается неизменной. Она в конечном счете задается постоянной частотой вращения шпинделя. Однако за счет упругих деформационных смещений скорость становится переменной. На этапе возрастания a (участок *C—B* на рис. 2) скорость резания уменьшается, а на участке уменьшения припуска (*B—D*) — возрастает. При этом изменяется толщина срезаемого слоя. Наименее благоприятным для устойчивости является участок нарастания толщины срезаемого слоя. Здесь, во-первых, возрастает градиент изменения сил по отношению к вариациям скорости. Во-вторых, за счет увеличения толщины срезаемого слоя изменяются все параметры, способствующие потере устойчивости.

На рис. 4, а – условно показаны два цикла вариаций параметров. Цикл *A* соответствует условиям, при которых траектория является устойчивой в целом. Цикл *B* соответствует неустойчивой траектории в некотором диапазоне изменения параметров. Если существуют временные отрезки, на которых система теряет устойчивость, то в окрестности траектории образуются некоторые притягивающие множества. В этом случае в системе формируется сложная динамика, анализ которой будет выполнен в следующей статье этой серии.

5. При движении вдоль установившейся стационарной траектории происходит перестройка динамической системы, что отображается в образовании периодических траекторий корней характеристического полинома авторегрессионной модели сигнала виброакустической эмиссии процесса. Если воспользоваться ранее полученными результатами, относящимися к процессу точения [54], то по траекториям корней можно оценивать состояние инструмента и самого процесса.

Выводы. При точении стационарным состоянием является точка упругих деформаций вершины режущего инструмента относительно детали, расположенная в подвижной системе координат, движение которой определяется траекториями исполнительных элементов станка. В отличие от точения, при фрезеровании эта точка вырождается в замкнутую траекторию деформационных смещений инструмента относительно обрабатываемой заготовки. Эта замкнутая траектория определяется на основе перераспределения сил и упругих деформационных смещений по пути обработки.

Если при контакте зуба фрезы и обрабатываемой детали данная траектория устойчива, то она характеризует аттрактор, то есть притягивающее множество в пространстве состояния. Приведенные материалы по анализу устойчивости этих траекторий позволяют на стадии проектирования выбирать технологические режимы и параметры инструмента, при которых стационарная траектория является асимптотически устойчивой. Кроме того, проведенное исследование открывает новое направление динамической диагностики состояния процесса фрезерования на основе измерения вибрационных последовательностей, сопровождающих обработку.

Библиографический список

1. Пригожин, И. Порядок из хаоса / И. Пригожин, И. Стенгерс ; под общ. ред. В. И. Аршинова, Ю. Л. Климонтовича, Ю. В. Сачкова. — Москва : Прогресс, 1986. — 193 с.
2. Пригожин, И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой / И. Пригожин, И. Стенгерс. — Москва : Едиториал УРСС, 2003. — 312 с.
3. Хакен, Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. — Москва : Мир, 1985. — 424 с.
4. Хакен, Г. Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии / Г. Хакен. — Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. — 320 с.
5. Колесников, А. А. Синергетическая теория управления / А. А. Колесников. — Москва : Энергоатомиздат, 1994. — 344 с.
6. Синергетика и проблемы теории управления / под ред. А. А. Колесникова. — Москва : Физматлит, 2004. — 504 с.
7. Заковоротный, В. Л. Динамика процесса резания. Синергетический подход / В. Л. Заковоротный, М. Б. Флек . — Ростов-на-Дону : Терра, 2006. — 880 с.
8. Синергетический системный синтез управляемой динамики металлорежущих станков с учетом эволюции связей / В. Л. Заковоротный [и др.]. — Ростов-на-Дону : Изд-во ДГТУ, 2008. — 324 с.
9. Zakovorotny, V. L. The Problems of Control of the Evolution of the Dynamic System Interacting with the Medium / V. L. Zakovorotny, A. D. Lukyanov // International Journal of Mechanical Engineering and Automation. — 2014. — Vol. 1, № 5. — P. 271–285.
10. Тлустый, И. Автоколебания в металлорежущих станках / И. Тлустый. — Москва : Машгиз, 1956. —395 с.
11. Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen / I. Tlusty. — Berlin : Veb Verlag Technik Berlin, 1962. — 320 p.
12. Tobias, S.-A. Machine Tool Vibrations / S.-A. Tobias. — London : Blackie, 1965. — 350 p.
13. Кудинов, В. А. Динамика станков / В. А. Кудинов. — Москва : Машиностроение, 1967. — 359 с.
14. Эльясберг, М. Е. Автоколебания металлорежущих станков: теория и практика / М. Е. Эльясберг. — Санкт-Петербург : ОКБС, 1993. — 182 с.
15. Вейц, В. Л. Задачи динамики, моделирования и обеспечения качества при механической обработке маложестких заготовок / В. Л. Вейц, Д. В. Васильков // СТИН. — 1999. —№ 6.— С. 9–13.
16. Заковоротный, В. Л. Математическое моделирование и параметрическая идентификация динамических свойств подсистемы инструмента и заготовки / В. Л. Заковоротный, Д.-Т. Фам, С.-Т. Нгуен // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. — 2011. — № 2. — С. 38–46. — (Технические науки).
17. Соколовский, А. П. Вибрации при работе на металлорежущих станках / А. П. Соколовский // Исследование колебаний при резании металлов. — Москва : Машгиз, 1958. — С. 15–18.
18. Мурашкин, Л. С. Прикладная нелинейная механика станков / Л. С. Мурашкин, С. Л. Мурашкин. — Ленинград : Машиностроение, 1977. — 192 с.
19. Zakovorotny, V. L. Bifurcations in the dynamic system of the mechanic processing in metal-cutting tools / V. L. Zakovorotny // Journal of Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. — 2015. —Vol. 10. — P. 102–116.
20. Заковоротный, В. Л. Самоорганизация и бифуркации динамической системы обработки металлов резанием / В. Л. Заковоротный, Д.-Т. Фам, В. С. Быкадор // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2014. — Т. 22, № 3. — С. 26–40.
21. Заковоротный, В. Л. Влияние изгибных деформаций инструмента на самоорганизацию и бифуркации динамической системы резания металлов / В. Л. Заковоротный, Д.-Т. Фам, В. С. Быкадор // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2014. — Т. 22, № 3. — С. 40–53.
22. Stepan, G. Delay-differential equation models for machine tool chatter / G. Stepan ; ed. F. C. Moon . — New York : John Wiley, 1998. — P. 165–192.
23. Stepan, G. Delay, Parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes / G. Stepan, T. Insperge, R. Szalai // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2005. — Vol. 15, № 9. — P. 2783–2798.
24. Tobias, S.-A. Theory of regenerative machine tool chatter / S. A. Tobias, W. Fishwick // The Engineer. — 1958. — Vol. 205. — P. 199–203.
25. Merritt, H.-E. Theory of self-excited machine tool chatter / H.-E. Merritt // ASME. Journal of Engineering for Industry. — 1965. — Vol. 205, № 11. — P. 447–454.
26. Sridhar, R. A stability algorithm for the general milling process. Contribution to machine tool chatter research — 7 / R. Sridhar, R.-E. Hohn, G.-W. Long // ASME. Journal of Engineering for Industry. — 1968. — Vol. 90, № 2. — P. 330–334.

27. Altintas, Y. Analytical prediction of stability lobes in milling / Y. Altintas, E. Budak // CIRP Annals. — 1995. — Vol. 44, № 1. — P. 357–362.

28. Tlusty, J. Special aspects of chatter in milling / J. Tlusty, F. Ismail // ASME. Journal of Vibration, Stress and Reliability in Design. — 1983. — Vol. 105, № 1. — P. 24–32.

29. Minis, I. A new theoretical approach for the prediction of machine tool chatter in milling / I. Minis, T. Yanushevsky // ASME. Journal of Engineering for Industry. — 1993. — Vol. 115, № 2. — P. 1–8.

30. Insperger, T. Stability of the milling process / T. Insperger, G. Stepan // Periodical Polytechnic-Mechanical Engineering. — 2000. — Vol. 44, № 1. — P. 47–57.

31. Budak, E. Analytical prediction of chatter stability in milling. Part I: General formulation / E. Budak, Y. Altintas // ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. — 1998. — Vol. 120, № 6 (1). — P. 22–30.

32. Budak, E. Analytical prediction of chatter stability conditions for multi-degree of systems in milling. Part II: Applications / E. Budak, Y. Altintas // ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. — 1998. — Vol. 120, № 6 (1). — P. 31–36.

33. Merdol, D. Multi-frequency solution of chatter stability for low immersion milling / D. Merdol, Y. Altintas // ASME. Journal of Manufacturing Science and Engineering. — 2004. — Vol. 126, № 3. — P. 459–466.

34. Stability of up-milling and down-milling. Part 1: Alternative analytical methods / T. Insperger // International Journal of Machine Tools and Manufacture. — 2003. — Vol. 43, № 1. — P. 25–34.

35. Kline, W.-A. The prediction of surface accuracy in end milling / W.-A. Kline, R.-E. Devor, I.-A. Shareef // ASME. Journal of Engineering for Industry. — 1982. — Vol. 104, № 5. — P. 272–278.

36. Elbestawi, M.-A. Dynamic modeling for the prediction of surface errors in milling of thin-walled sections / M.-A. Elbestawi, R. Sagherian // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 1991. — Vol. 25, № 2. — P. 215–228.

37. Campomanes, M.-L. An improved time domain simulation for dynamic milling at small radial immersions / M.-L. Campomanes, Y. Altintas // ASME. Journal of Manufacturing Science and Engineering. — 2003. — Vol. 125, № 3. — P. 416–425.

38. Paris, H. Surface shape prediction in high-speed milling / H. Paris, G. Peigne, R. Mayer // International Journal of Machine Tools and Manufacture. — 2004. — Vol. 44, № 15. — P. 1567–1576.

39. Altintas, Y. A general mechanics and dynamics model for helical end mills / Y. Altintas, P. Lee // CIRP Annals. — 1996. — Vol. 45, № 1. — P. 59–64.

40. Ozturk, E. Modeling of 5-axis milling processes / E. Ozturk, E. Budak // Machining Science and Technology. — 2007. — Vol. 11, № 3. — P. 287–311.

41. Budak, E. Modeling and simulation of 5-axis milling processes / E. Budak, E. Ozturk, L.-T. Tunc // CIRP Annals. Manufacturing Technology. — 2009. — Vol. 58, № 1. — P. 347–350.

42. Stability limits of milling considering the flexibility of the workpiece and the machine / U. Bravo [et al.] // International Journal of Machine Tools and Manufacture. — 2005. — Vol. 45. — P. 1669–1680.

43. Modeling regenerative workpiece vibrations in five-axis milling / K. Weinert [et al.] // Production Engineering. Research and Development. — 2008. — № 2. — P. 255–260.

44. Biermann, D. A general approach to simulating workpiece vibrations during five-axis milling of turbine blades / D. Biermann, P. Kersting, T. Surmann // CIRP Annals. Manufacturing Technology. — 2010. — Vol. 59, № 1. — P. 125–128.

45. Воронов, С. А. Методика применения численного моделирования динамики многокоординатного фрезерования сложнопрофильных деталей при проектировании технологического процесса / С. А. Воронов, И. А. Киселев, С. В. Аршинов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Машиностроение. — 2012. — Спецвыпуск, № 6. — С. 50–69.

46. Воронов, С. А. Критерии оценки устойчивости процесса фрезерования нежестких деталей / С. А. Воронов, А. В. Непочатов, И. А. Киселев // Известия вузов. Машиностроение. — 2011. — № 1 (610). — С. 50–62.

47. Voronov, S. Dynamics of flexible detail milling / S. Voronov, I. Kiselev // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics. — 2011. — Vol. 225, № 3. — P. 1177–1186.

48. Заковоротный, В. Л. Свойства формообразующих движений при сверлении глубоких отверстий малого диаметра / В. Л. Заковоротный, Е. Ю. Панов, П. Н. Потапенко // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2001. — Т. 1, № 2. — С. 81–93.

49. Понтрягин, Л. С. Избранные труды. Т. 2 / Л. С. Понтрягин. — Москва : Наука, 1988. —576 с.

50. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильев, В. М. Волосов // Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. — Киев : Изд-во АН УССР, 1963. — С. 56–61.

51. Заковоротный, В. Л. Моделирование деформационных смещений инструмента относительно заготовки при точении / В. Л. Заковоротный, Д.-Т. Фам, С.-Т. Нгуен // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2010. — Т. 7 (50). — С. 1005–1015.

52.Данжело, Р. Линейные системы с переменными параметрами / Р. Данжело. — Москва : Машиностроение, 1974. — 287 с.

53.Березкин, Е. Н. Лекции по теоретической механике / Е. Н. Березкин. — Москва : Изд-во МГУ, 1968. — 279 с.

54.Заковоротный, В. Л. Построение информационной модели динамической системы металлорежущего станка для диагностики процесса обработки / В. Л. Заковоротный, И. В. Ладник // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1991. — № 4. — С.75–81.

References

1. Prigozhin, I., Stengers, I.; Arshinov, V.I., Klimontovich, Y.L., Sachkov, Y.V., eds. Poryadok iz khaosa. [Order out of chaos.] Moscow: Progress, 1986, 193 p. (in Russian).

2. Prigozhin, I., Stengers, I. Poryadok iz khaosa. Novyy dialog cheloveka s prirodoy [Order out of chaos. A new dialogue of man with nature.] Moscow: Editorial URSS, 2003, 312 p. (in Russian).

3. Haken, G. Sinergetika. Ierarkhiya neustoychivostey v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroystvakh. [Synergetics. Hierarchy of instabilities in self-organizing systems and devices.] Moscow: Mir, 1985, 424 p. (in Russian).

4. Haken, G. Tayny prirody. Sinergetika: uchenie o vzaimodeystvii. [Secrets of nature. Synergetics: theory of interaction.] Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003, 320 p. (in Russian).

5. Kolesnikov, A.A. Sinergeticheskaya teoriya upravleniya. [Synergetic control theory.] Moscow: Energoatomizdat, 1994, 344 p. (in Russian).

6. Kolesnikov, A.A. ed. Sinergetika i problemy teorii upravleniya. [Synergetics and control theory problems.] Moscow: Fizmatlit, 2004, 504 p. (in Russian).

7. Zakovorotny, V.L., Flek, M.F. Dinamika protsessa rezaniya. Sinergeticheskiy podkhod. [Cutting process dynamics. Synergetic approach.] Rostov-on-Don: Terra, 2006, 880 p. (in Russian).

8. Zakovorotny, V.L., et al. Sinergeticheskiy sistemnyy sintez upravlyaemoy dinamiki metallorezhushchikh stankov s uchetom evolyutsii svyazey. [Synergetic system synthesis of controlled dynamics of machine tools with coupling evolution.] Rostov-on-Don: DSTU Publ. Centre, 2008, 324 p. (in Russian).

9. Zakovorotny, V.L., Lukyanov, A.D. The Problems of Control of the Evolution of the Dynamic System Interacting with the Medium. International Journal of Mechanical Engineering and Automation, 2014, vol. 1, no. 5, pp. 271–285.

10. Tlusty, I. Avtokolebaniya v metallorezhushchikh stankakh. [Self-oscillations in machine tools.] Moscow: Mashgiz, 1956, 395 p. (in Russian).

11. Tlusty, I. Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen. Berlin: Veb Verlag Technik Berlin, 1962, 320 p.

12. Tobias, S.-A. Machine Tool Vibrations. London: Blackie, 1965, 350 p.

13. Kudinov, V.A. Dinamika stankov. [Machine dynamics.] Moscow: Mashinostroenie, 1967, 359 p. (in Russian).

14. Elyasberg, M.E. Avtokolebaniya metallorezhushchikh stankov: teoriya i praktika. [Self-oscillations of machine tools: theory and practice.] St. Petersburg: OKBS, 1993, 182 p. (in Russian).

15. Veits, V.L., Vasilkov, D.V. Zadachi dinamiki, modelirovaniya i obespecheniya kachestva pri mekhanicheskoy obrabotke malozhestkikh zagotovok. [Problems of dynamics, simulation and quality assurance under machining of nonrigid workpieces.] STIN, 1999, no. 6, pp. 9–13 (in Russian).

16. Zakovorotny, V.L., Pham Dinh Tung, Nguen Xuan Chiem. Matematicheskoe modelirovanie i parametricheskaya identifikatsiya dinamicheskikh svoystv podsistemy instrumenta i zagotovki. [Mathematical modeling and parametric identification of dynamic properties of the subsystem of the cutting tool and workpiece in the turning.] University News. North-Caucasian region. Technical Sciences Series, 2011, no. 2, pp. 38–46 (in Russian).

17. Sokolovskiy, A.P. Vibratsii pri rabote na metallorezhushchikh stankakh. Issledovanie kolebaniy pri rezanii metallov. [Vibration at work on machine tools. Study on vibrations in metal cutting] Moscow: Mashgiz, 1958, pp. 15–18 (in Russian).

18. Murashkin, L.S., Murashkin, S.L. Prikladnaya nelineynaya mekhanika stankov. [Applied nonlinear machine engineering.] Leningrad: Mashinostroenie, 1977, 192 p. (in Russian).

19. Zakovorotny, V.L. Bifurcations in the dynamic system of the mechanic processing in metal-cutting tools. Journal of Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, 2015, vol. 10, pp. 102–116.

20. Zakovorotny, V.L., Pham D.-T., Bykador, V.S. Samoorganizatsiya i bifurkatsii dinamicheskoy sistemy obrabotki metallov rezaniem. [Self-organization and bifurcations of dynamical metal cutting system.] Izvestia VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 2014, vol. 22, no. 3, pp. 26–40 (in Russian).

21. Zakovorotny, V.L., Pham D.-T., Bykador, V.S. Vliyanie izgibnykh deformatsiy instrumenta na samoorganizatsiyu i bifurkatsii dinamicheskoy sistemy rezaniya metallov. [Influence of a flexural deformation of a tool on self-organization and bifurcations of dynamical metal cutting system.] Izvestia VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 2014, vol. 22, no. 3, pp. 40–53 (in Russian).

22. Stepan, G.; Moon F.C., ed. Delay-differential equation models for machine tool chatter. New York: John Wiley, 1998, pp. 165–192.

23. Stepan, G., Insperge, T., Szalai, R. Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2005, vol. 15, no. 9, pp. 2783–2798.

24. Tobias, S.-A., Fishwick, W. Theory of regenerative machine tool chatter. The Engineer, 1958, vol. 205, pp. 199–203.

25. Merritt, H.-E. Theory of self-excited machine tool chatter. ASME. Journal of Engineering for Industry, 1965, vol. 205, no. 11, pp. 447–454.

26. Sridhar, R., Hohn, R.-E., Long, G.-W. A stability algorithm for the general milling process. Contribution to machine tool chatter research - 7. ASME. Journal of Engineering for Industry, 1968, vol. 90, no. 2, pp. 330–334.

27. Altintas, Y., Budak, E. Analytical prediction of stability lobes in milling. CIRP Annals, 1995, vol. 44, no. 1, pp. 357–362.

28. Tlusty, J., Ismail, F. Special aspects of chatter in milling. ASME. Journal of Vibration, Stress and Reliability in Design, 1983, vol. 105, no. 1, pp. 24–32.

29. Minis, I., Yanushevsky, T. A new theoretical approach for the prediction of machine tool chatter in milling. ASME. Journal of Engineering for Industry, 1993, vol. 115, no. 2, pp. 1–8.

30. Insperger, T., Stepan, G. Stability of the milling process. Periodical Polytechnic-Mechanical Engineering, 2000, vol. 44, no. 1, pp. 47–57.

31. Budak, E., Altintas, Y. Analytical prediction of chatter stability in milling. Part I: General formulation. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1998, vol. 120, no. 6 (1), pp. 22–30.

32. Budak, E., Altintas, Y. Analytical prediction of chatter stability conditions for multi-degree of systems in milling. Part II: Applications. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1998, vol. 120, no. 6 (1), pp. 31–36.

33. Merdol, D., Altintas, Y. Multi-frequency solution of chatter stability for low immersion milling. ASME. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2004, vol. 126, no. , pp. 459–466.

34. Insperger, T. Stability of up-milling and down-milling. Part 1: Alternative analytical methods. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2003, vol. 43, no. 1, pp. 25–34.

35. Kline, W.-A., Devor, R.-E, Shareef, I.-A. The prediction of surface accuracy in end milling. ASME. Journal of Engineering for Industry, 1982, vol. 104, no. 5, pp. 272–278.

36. Elbestawi, M.-A., Sagherian, R. Dynamic modeling for the prediction of surface errors in milling of thin-walled sections. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 1991, vol. 25, no. 2, pp. 215–228.

37. Campomanes, M.-L., Altintas, Y. An improved time domain simulation for dynamic milling at small radial immersions. ASME. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2003, vol. 125, no. 3, pp. 416–425.

38. Paris, H., Peigne, G., Mayer, R. Surface shape prediction in high-speed milling. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2004, vol. 44, no. 15, pp. 1567–1576.

39. Altintas, Y., Lee, P. A general mechanics and dynamics model for helical end mills. CIRP Annals, 1996, vol. 45, no. 1, pp. 59–64.

40. Ozturk, E., Budak, E. Modeling of 5-axis milling processes. Machining Science and Technology, 2007, vol. 11, no. 3, pp. 287–311.

41. Budak, E., Ozturk, E., Tunc, L.-T. Modeling and simulation of 5-axis milling processes. CIRP Annals. Manufacturing Technology, 2009, vol. 58, no. 1, pp. 347–350.

42.Bravo, U., et al. Stability limits of milling considering the flexibility of the workpiece and the machine. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2005, vol. 45, pp. 1669–1680.

43.Weinert, K., et al. Modeling regenerative workpiece vibrations in five-axis milling. Production Engineering. Research and Development, 2008, no. 2, pp. 255–260.

44.Biermann, D., Kersting, P., Surmann, T. A general approach to simulating workpiece vibrations during five-axis milling of turbine blades. CIRP Annals. Manufacturing Technology, 201, vol. 59, no. 1, pp. 125–128.

45.Voronov, S.A., Kiselev, I.A., Arshinov, S.V. Metodika primeneniya chislennogo modelirovaniya dinamiki mnogokoordinatnogo frezerovaniya slozhnoprofil'nykh detaley pri proektirovanii tekhnologicheskogo protsessa. [Application methods of numerical simulation of multi-axis milling dynamics of figurine-shaped detection under process designing.] Vestnik MGTU im. N. E. Baumana, Machine Building, 2012, spec. iss. no. 6, pp. 50–69 (in Russian).

46.Voronov, S.A., Nepochatov, A.V., Kiselev, I.A. Kriterii otsenki ustoychivosti protsessa frezerovaniya nezhestkikh detaley. [Estimation criteria of process stability of non-stiff workpieces milling.] Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building, 2011, no. 1 (610) pp. 50–62 (in Russian).

47.Voronov, S., Kiselev, I. Dynamics of flexible detail milling. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, 2011, vol. 225, no. 3, pp. 1177–1186.

48.Zakovorotny, V.L., Panov, E.Y., Potapenko, P.N. Svoystva formoobrazuyushchikh dvizheniy pri sverlenii glubokikh otverstiy malogo diametra. [Properties of forming movements when drilling deep pinholes.] Vestnik of DSTU, 2001, vol. 1, no. 2, pp. 81–93 (in Russian).

49.Pontryagin, L.S. Izbrannye trudy. T. 2 [Selecta. Vol. 2.] Moscow: Nauka, 1988, 576 p. (in Russian).

50.Tikhonov, A.N., Vasilyev, A.B., Volosov, V.M. Differentsial'nye uravneniya, soderzhashchie malyy parametr. [Differential equations with a small parameter.] Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma po nelineynym kolebaniyam. [Proc. Int. Symposium on nonlinear oscillations.] Kiev: Izd-vo AN USSR, 1963, pp. 56–61 (in Russian).

51.Zakovorotny, V.L., Pham Dinh Tung, Nguen Xuan Chiem. Modelirovanie deformatsionnykh smeshcheniy instrumenta otnositel'no zagotovki pri tochenii. [Modeling of tool deformation offsetting to workpiece in turning.] Vestnik of DSTU, 2010, vol. 7 (50), pp. 1005–1015 (in Russian).

52.Danzhelo, R. Lineynye sistemy s peremennymi parametrami. [Linear systems with variable parameters.] Moscow: Mashinostroenie, 1974, 287 p. (in Russian).

53.Berezkin, E.N. Lektsii po teoreticheskoy mekhanike. [Lectures on theoretical mechanics.] Moscow: Izd-vo MGU, 1968, 279 p. (in Russian).

54.Zakovorotny, V.L., Ladnik, I.V. Postroenie informatsionnoy modeli dinamicheskoy sistemy metallorezhushchego stanka dlya diagnostiki protsessa obrabotki. [Building of data model of the machine tool dynamic system for treatment process diagnostics.] Journal of Machinery Manufacture and reliability, 1991, no. 4, pp. 75–81 (in Russian).

Поступила в редакцию 16.09.2015
Сдана в редакцию 17.09.2015
Запланирована в номер 22.01.2016